

Thevenin 模型比较理想。

3.3 分数阶模型

3.3.1 模型介绍

图 3-15 展示了动力电池 1-单体 2 的电化学阻抗谱测试结果，其中高频部分为一个圆心位于横轴下方的半圆，一般认为它与电极和电解液界面处的双电层有关。在拟合这种特性时，研究人员发现使用纯电容元件的等效电路模型往往不能达到理想的拟合精度。实验测得的双电层频响特性和纯电容不一致的现象被称为“弥散效应”。这种与纯电容的偏离，可以通过常相位角元件（Constant Phase Element, CPE）进行拟合，其阻抗表达式为

$$Z'_{\text{CPE}}(\omega) = \frac{\omega^{-\alpha}}{Y} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad Z''_{\text{CPE}}(\omega) = \frac{\omega^{-\alpha}}{Y} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3-79)$$

式中， ω 为角频率。常相位角元件有两个参数：第一个参数是 Y ，其量纲是 $\text{s}^{\alpha}\Omega^{-1}$ ；第二个参数是 α ，是一个无量纲的指数，用来衡量常相位角元件偏离纯电容元件的程度。若 α 取 0，则常相位角元件即为纯电阻元件；若 $\alpha=1$ ，即为纯电容元件。

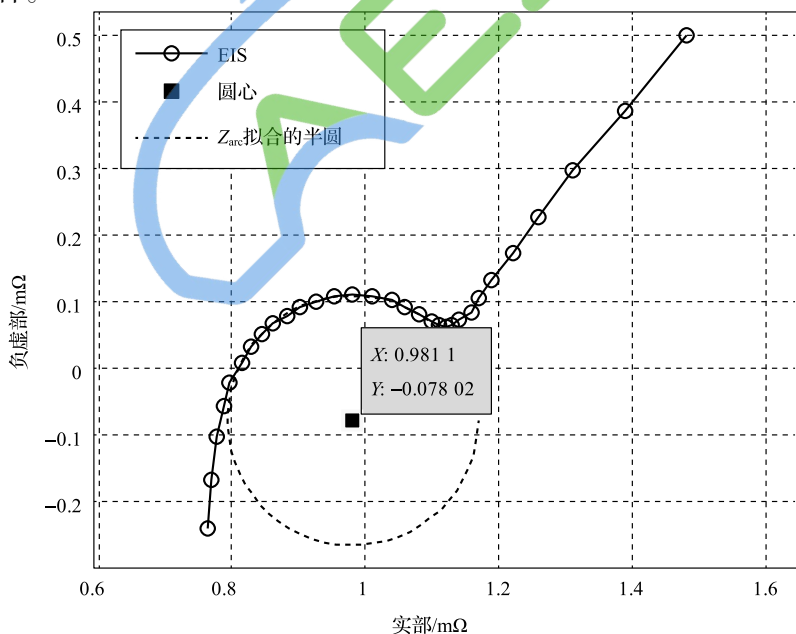


图 3-15 电化学阻抗谱中的弥散效应

由式 (3-79) 可知, 常相位角元件的相位角 ϕ 满足

$$\tan\phi = \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad \phi = \frac{\alpha\pi}{2} \quad (3-80)$$

因此, 该元件的相位角与频率无关, 故被称为常相位角元件。

在阻抗谱拟合中, 常相位角元件常与纯电阻并联使用, 其阻抗记做 Z_{arc} , 表达式为

$$Z_{\text{arc}}(\omega) = \frac{\frac{1}{R} + Y\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - jY\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{2}{R}\right)Y\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (Y\omega^\alpha)^2} \quad (3-81)$$

$$Z'_{\text{arc}}(\omega) = \frac{\frac{1}{R} + Y\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{2}{R}\right)Y\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (Y\omega^\alpha)^2} \quad (3-82)$$

$$Z''_{\text{arc}}(\omega) = \frac{-Y\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{2}{R}\right)Y\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + (Y\omega^\alpha)^2} \quad (3-83)$$

消去 Y 可得:

$$\left(Z'_{\text{arc}}(\omega) - \frac{R}{2}\right)^2 + \left[Z''_{\text{arc}}(\omega) - \frac{R \cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 = \left[\frac{R}{2 \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\right]^2 \quad (3-84)$$

可见, 图 3-15 中频的圆弧可用式 (3-84) 所示的方程进行拟合。参数 α 越大, 圆弧圆心偏离实轴的距离越大, 也证明纯电容元件 ($\alpha = 1$) 无法拟合弥散效应。

然而, CPE 的特性在时域处理中较为困难, 需要借助分数阶微积分理论进行处理。分数阶微积分较为常用的定义有以下三种:

1. Grünwald-Letnikov (G-L) 定义

G-L 定义从传统的整数阶微积分归纳推广而来, 定义为

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (3-85)$$

式 (3-85) 为分数阶微分和积分的统一表达式。式中, ${}_a D_t^\alpha$ 为分数阶微积分算子, 阶次 α 的正负分别表示分数阶微分和积分; a 和 t 分别为微积分下限和上限; h 为步长; $[(t-a)/h]$ 表示对 $(t-a)/h$ 进行取整, $\binom{\alpha}{j}$ 为二项式系数:

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(j-1)]}{j!} & j > 0 \end{cases} \quad (3-86)$$

2. Riemann-Liouville (R-L) 定义

R-L 积分定义:

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3-87)$$

R-L 微分定义:

$${}_a D_t^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\int_a^t (t-\tau)^{n-\beta-1} f(\tau) d\tau \right] \quad (3-88)$$

式中, $0 < \alpha \leq 1$; $n-1 < \beta \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ 。

3. Caputo 定义

Caputo 积分定义为

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\alpha > 0) \quad (3-89)$$

Caputo 微分定义:

$${}_a D_t^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left[\int_a^t (t-\tau)^{n-\beta-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \right] \quad (3-90)$$

式中, $n-1 < \beta < n$, $n \in \mathbb{N}$ 。

可以证明, 对于大多数函数, G-L 和 R-L 定义完全等效, 其中 R-L 定义在理论分析研究中最常用, Caputo 定义更适用于分数阶微分方程初值问题的描述和讨论, 而 G-L 定义则为离散化近似提供了最直接的形式和方法。

3.3.2 模型构建

通过将 Thevenin 模型中的纯电容元件替换为常相位角元件, 可建立图 3-16 所示的分数阶模型。

类似于等效电路模型, 其传递函数表达为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{U_i(s) - U_{OC}(s)}{i_L(s)} = - \left(R_i + \frac{R_{ct}}{1 + R_{ct} Y s^{\alpha}} \right) \\ &= - \frac{(R_{ct} + R_i) + R_{ct} R_i Y s^{\alpha}}{1 + R_{ct} Y s^{\alpha}} \end{aligned} \quad (3-91)$$

即

$$\begin{aligned} U_i(s) - U_{OC}(s) + R_{ct} Y s^{\alpha} [U_i(s) - U_{OC}(s)] \\ = - (R_{ct} + R_i) i_L(s) - R_{ct} R_i Y s^{\alpha} i_L(s) \end{aligned} \quad (3-92)$$

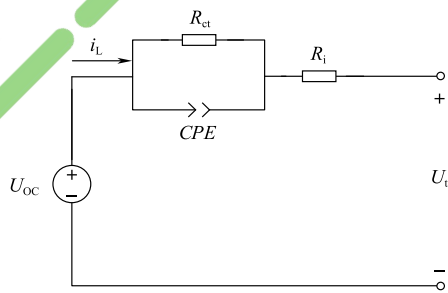


图 3-16 一种常用的分数阶模型

对式 (3-92) 进行反拉氏变换, 在第 k 个采样时刻可得,

$$\begin{aligned} U_1(k) = & -(R_{ct} + R_i)i_L(k) - R_{ct}R_iYD^\alpha i_L(k) + \\ & U_{oc}(k) + R_{ct}YD^\alpha [U_{oc}(k) - U_1(k)] \end{aligned} \quad (3-93)$$

3.3.3 参数辨识

对式 (3-93) 进行整理可得

$$\begin{aligned} U_1(k) = \Phi_k^T \theta_k = & [-i_L(k) \quad -D^\alpha i_L(k) \quad 1 \quad -D^\alpha U_1(k)] \\ & [R_i + R_{ct} \quad R_{ct}R_iY \quad (1 + R_{ct}YD^\alpha)U_{oc}(k) \quad R_{ct}Y]^T \end{aligned} \quad (3-94)$$

式中, D^α 代表的分数阶微积分, 可以用前述 G-L 定义进行计算。为了降低计算量, 可以将 G-L 定义近似为

$${}_a D_t^\alpha f(t) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^L (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (3-95)$$

式中, L 为根据短记忆准则选定的记忆长度。

在固定 α 的条件下, 式 (3-94) 的辨识则为线性问题, 通过递推最小二乘法即可实现在线辨识, 各个参数可以通过参数向量 θ 的值解析出来:

$$\begin{cases} U_{oc}(k) = \frac{\hat{\theta}_k(3) - \hat{\theta}_k(4) \left[\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=1}^L (-1)^j \binom{\alpha}{j} U_{oc}(k-j) \right]}{\left[1 + \frac{1}{h^\alpha} \hat{\theta}_k(4) \right]} \\ R_i(k) = \frac{\hat{\theta}_k(2)}{\hat{\theta}_k(4)} \\ R_{ct}(k) = \hat{\theta}_k(1) - R_i(k) \\ Y(k) = \frac{\hat{\theta}_k(4)}{R_{ct}(k)} \end{cases} \quad (3-96)$$

3.3.4 算例分析

设 $\alpha=0.8$, 以 40°C 条件下动力电池 1-单体 2 的 DST 工况数据进行模型参数辨识, 辨识的端电压误差如图 3-17 所示。

端电压最大误差在 8mV 以内, 可见, 分数阶模型也具有精确的端电压预测性能。

作为模型中的一个重要参数, OCV 可以用于反映动力电池老化状态和计算 SOC, 图 3-18 展示了分数阶模型在线辨识得到的 OCV 经过与 SOC 多项式拟合后与实验值的比较, 可以看出在 $10\% \sim 100\%$ SOC 范围内, 辨识得到的 OCV 可以很好地与实验值相吻合, 最大误差为 15mV 。

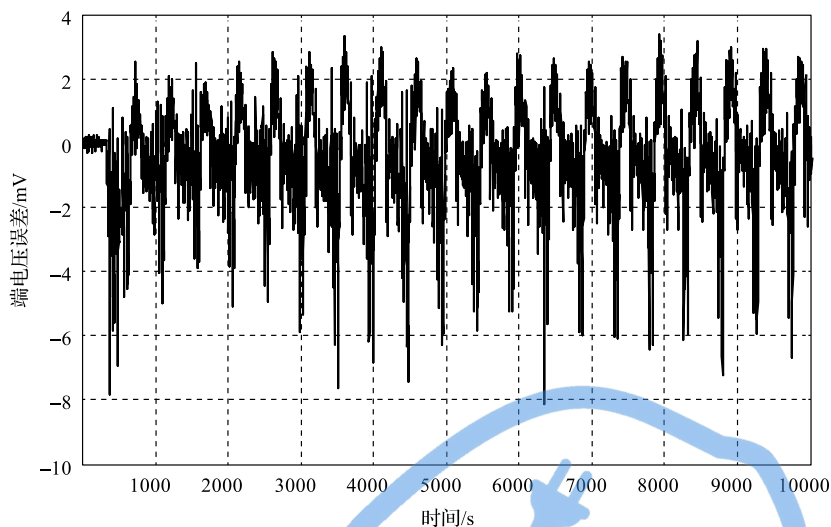


图 3-17 DST 工况下分数阶模型在线辨识的端电压误差

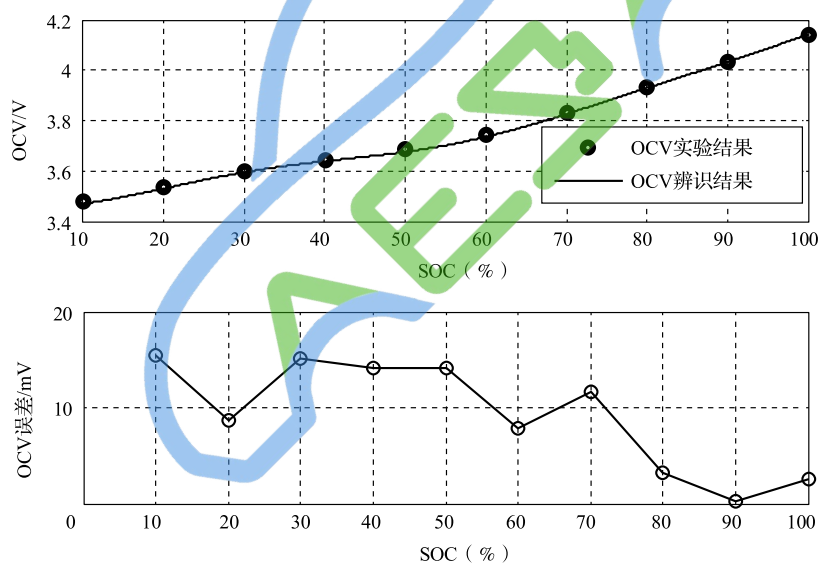


图 3-18 OCV 辨识值与实验值的比较

值得注意的是，以上例子中微分阶次取固定值，而通过遗传算法等优化算法可以实现微分阶次与其他参数的整体离线辨识。以同一动力电池相同老化状态、相同温度下的 HPPC 数据为例，采用遗传算法优化所有参数，得到的模型均方根误差（Root Mean Square Error, RMSE）如图 3-19 所示。在不同 SOC 下，分数阶模型的电压均方根误差小于 1.7mV，说明分数阶模型在离线辨识中同样具有很

高的精度。

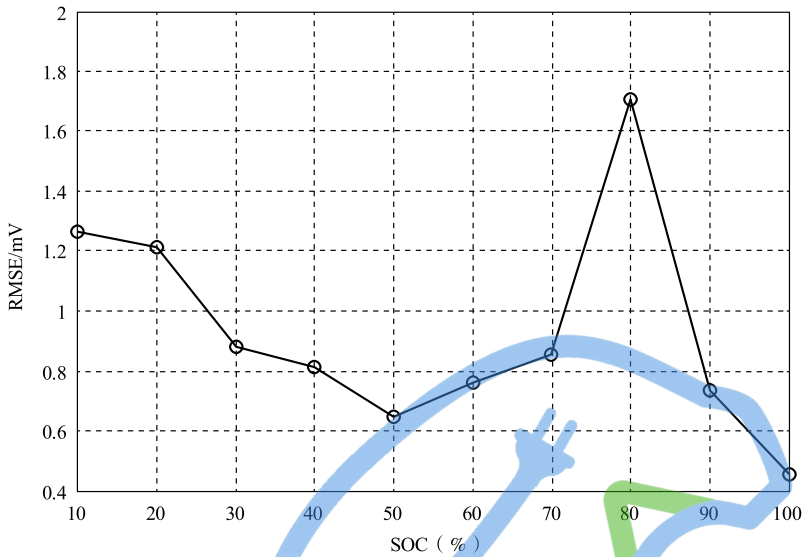


图 3-19 分数阶模型离线参数辨识均方根误差

图 3-20 展示了分数阶模型中 CPE 元件的微分阶次 α 辨识结果与 SOC 的关系，可以看出， α 的优化结果在 0.61 ~ 0.93 的范围内波动，且大部分情况下稳定在 0.9 以下，进一步证明了动力电池双电层偏离纯电容的特性。

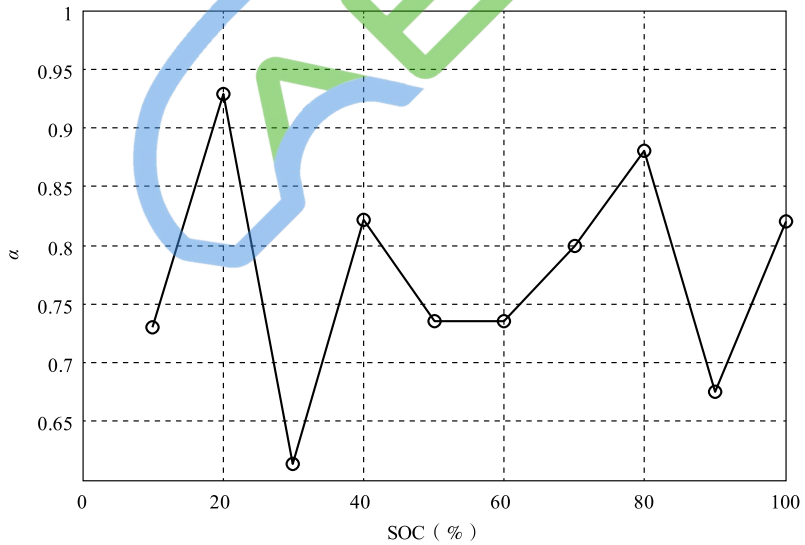


图 3-20 CPE 元件微分阶次 α 辨识结果与 SOC 的关系